

الدالة اللوغاريتمية [II]

Fonction logarithme

تمرين 1

I - نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]1; 3[$ بـ:

$$g(x) = a \ln(3+x) + b \ln(1-x) - 2$$

حيث a و b عدنان حقيقيان.

عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يقبل منحنى الدالة g عند النقطة $(0; -2+3\ln 3)$ مماسا موازيا لحامل محور الفواصل.

II - نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]1; 3[$ بـ:

$$f(x) = 3\ln(3+x) + \ln(1-x) - 2$$

(C) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 - احسب $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. استنتج أن المنحنى

(C) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب كتابة معادلتيهما.

- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

- هل المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف؟ برّر إجابتك.

2 - (T) هو المماس لـ (C) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 .

اكتب معادلة للمستقيم (T) إذا كان معامل توجيهه يساوي 1.

3 - أثبت أن (C) يقطع محور الفواصل عند نقطتين فاصلتيهما

α و β حيث: $-1,6 < \alpha < -1,5$ و $0,8 < \beta < 0,9$.

- ارسم المستقيم (T) والمنحنى (C). (وحدة الطول 2cm)

4 - عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m ($m > 0$) التي من

أجلها تقبل المعادلة $|f(x)| = \ln m$ أربعة حلول متميزة.

تمرين 2 (بكالوريا بتصرف)

I - نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ:

$$g(x) = x^2 - 2\ln x$$

ادرس اتجاه تغير الدالة g ، شكل جدول تغيراتها، ثم استنتج

أنه من أجل كل $x > 0$ فإن: $g(x) > 0$.

II - نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{\ln x}{x}$$

ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 - احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. استنتج أن المنحنى

(C) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (Δ) معادلته $y = \frac{x}{2}$.

- ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (Δ).

- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(لاحظ أنه من أجل كل $x > 0$ ، $f'(x) = \frac{g(x)+2}{2x^2}$)

بوزيعة: ربيع الثاني 1443هـ

2 - بين أن $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $]0; +\infty[$.

تحقق أن $0,7 < \alpha < 0,8$. أعط حصرًا للعدد α سعته 10^{-2} .

3 - بين أن (C) يقبل نقطة انعطاف، يطلب تعيينها.

4 - اكتب معادلة المماس (T) لـ (C) والذي يوازي (Δ).

- هل المنحنى (C) يقبل مماسا يشمل المبدأ؟ علّل.

- ارسم (Δ)، (T) و (C). (وحدة الطول 2cm)

5 - ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود وعدد

حلول المعادلة: $m x - \ln x = 0$.

6 - دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x) = \frac{x}{2} + \frac{\ln|x|}{x}$

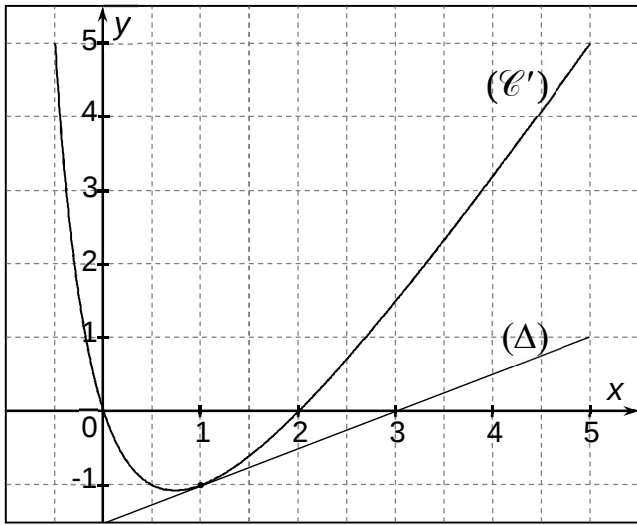
أثبت أن h فردية ثم ارسم بيانها (C') في المعلم السابق.

تمرين 3

نعتبر الدالة f القابلة للاشتقاق على المجال $[-0,5; 5]$ ،

ليكن (C') بيان الدالة f' مشتقة الدالة f ، والمستقيم (Δ)

مماس المنحنى (C') عند النقطة التي فاصلتها 1.



1 - ادرس إشارة $f'(x)$. استنتج تغيرات f على $[-0,5; 5]$.

2 - عيّن $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - f'(1)}{x - 1}$ و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

3 - عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل x من

$[-0,5; 5]$ فإن $f(x) = ax^2 + b[-x + \ln(x+1)]$.

4 - شكّل جدول تغيرات الدالة f ثم ارسم المنحنى (C).

5 - دالة معرفة على المجال $[-5; 5]$ بـ:

$$g(x) = x^2 - 6|x| + 6\ln(|x|+1)$$

(أ) بين أن الدالة g قابلة للاشتقاق عند 0.

(ب) أثبت أن الدالة g زوجية ثم ارسم بيانها (C).

تمرين 4

f الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{x+1+\ln x}{x}$ ($\mathcal{C}$) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. استنتج أن المنحني

($\mathcal{C}$) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب كتابة معادليهما.

2- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3- ادرس وضعية ($\mathcal{C}$) بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $y = 1$.

4- أثبت أن المنحني ($\mathcal{C}$) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.

5- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يحقق

$\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{3}$ ، ثم ادرس إشارة $f(x)$ على $]0; +\infty[$.

6- بين أن معادلة مماس ($\mathcal{C}$) عند $(\alpha; 0)$: $y = \frac{\alpha+1}{\alpha^2}(x - \alpha)$.

7- احسب $f(2)$ و $f(4)$ ثم ارسم ($\mathcal{C}$). (الوحدة 2cm)

8- h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = f(e^x)$. دُون كتابة

عبارة $h(x)$ احسب $h'(x)$ ثم بين أن $h'(\alpha) = -\alpha^2 e$.

تمرين 5

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x + 1 + 2 \ln \left(\frac{x+2}{x+1} \right)$

$$f(x) = x + 1 + 2 \ln \left(\frac{x+2}{x+1} \right)$$

($\mathcal{C}$) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- احسب النهايات عند حدود مجال تعريف الدالة f .

2- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3- أثبت أن المنحني ($\mathcal{C}$) يقبل 3 مستقيمات مقاربة أحدهم

(Δ) معادلته $y = x + 1$. ادرس وضعية ($\mathcal{C}$) بالنسبة لـ (Δ).

4- أثبت أن النقطة $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2} \right)$ مركز تناظر لـ ($\mathcal{C}$).

5- ارسم المستقيم (Δ) والمنحني ($\mathcal{C}$). (وحدة الطول 1cm)

6- برهن على وجود مماسين للمنحني ($\mathcal{C}$) معامل توجيه كل

منهما يساوي $\frac{2}{3}$ ثم اكتب معادلتَي هذين المماسين.

7- نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

$$g(x) = x - 1 + 2[\ln(x+1) - \ln x]$$

تحقق أنه لما $x > 0$: $g(x) = f(x-1) - 1$. اشرح كيفية

رسم المنحني ($\mathcal{C}'$) الممثل لـ g انطلاقا من ($\mathcal{C}$). ارسم ($\mathcal{C}'$).

تمرين 6

1- g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بـ: $g(x) = 4(\ln x - 1) + x$

1- ادرس اتجاه تغير الدالة g ، شكل جدول تغيراتها.

2- بين أن $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $]0; +\infty[$.

تحقق أن $1,7 < \alpha < 1,8$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II - f دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \left(\frac{x-4}{x} \right) \ln x$ ($\mathcal{C}$) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- أثبت أنه من أجل كل $x > 0$ فإن: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

- استنتج اتجاه تغير الدالة f على $]0; +\infty[$.

2- احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. شكل جدول تغيرات f .

3- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x]$. ماذا يمكن قوله عن

المنحني ($\mathcal{C}$) والمنحني ($\mathcal{C}'$) الممثل للدالة $\ln$ ؟

- ادرس وضعية ($\mathcal{C}$) بالنسبة لـ ($\mathcal{C}'$) ثم بالنسبة لمحور الفواصل.

4- بين أن $f(\alpha) = -\frac{(\alpha-4)^2}{4\alpha}$ ثم أعط حصرا لـ $f(\alpha)$.

5- ارسم المماس (Δ) لـ ($\mathcal{C}$) عند 1 والمنحنيين ($\mathcal{C}$) و ($\mathcal{C}'$).

6- برهن على وجود مماسين لـ ($\mathcal{C}$) يقطعان حامل محور

التراتب عند الترتيبة $-\frac{1}{2}$.

تمرين 7

I - نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \ln \left(\frac{1+e^x}{e} \right)$

($\mathcal{C}_f$) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، فسر النتيجة بيانيا، ثم $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2- بين أن: $f(x) = x - 1 + \ln(1 + e^{-x})$ من أجل كل x

من $\mathbb{R}$. استنتج أن ($\mathcal{C}_f$) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ).

3- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4- اكتب معادلة المماس (T) للمنحني ($\mathcal{C}_f$) عند $x_0 = 0$.

5- حل المعادلة $f(x) = 0$ ، ثم ارسم (Δ)، (T) و ($\mathcal{C}_f$).

6- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة

حلول المعادلة: $\ln(1 + e^x) = mx$.

II - g_k الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g_k(x) = 1 + k f(x)$

k وسيط حقيقي غير معدوم، وليكن ($\mathcal{C}_k$) تمثيلها البياني.

1- بين أن جميع المنحنيات ($\mathcal{C}_k$) تشمل نقطة ثابتة، عيّن.

2- ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي k اتجاه تغير الدالة g_k .

3- ناقش حسب قيم k الأوضاع النسبية لـ ($\mathcal{C}_k$) و ($\mathcal{C}_{-k}$).

4- M نقطة من ($\mathcal{C}_k$) فاصلتها $\frac{k}{2}$. أثبت أنه عندما k يسمح

$\mathbb{R}^*$ فإن M تنتمي إلى منحني يطلب تعيين معادلة له.

5- عيّن قيمة العدد k بحيث يقبل ($\mathcal{C}_k$) عند النقطة ذات

الفاصلة المعدومة مماسا يعامد (Δ) المذكور في الجزء I -.